Exercice 1.2.1.

Résoudre par le simplexe

$$\text{Max } x_1 + 2x_2$$

$$\text{sous} \left\{ \begin{array}{rcrl} -3x_1 & + & 2x_2 & \leq 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq 4 \\ x_1 & + & x_2 & \leq 5 \end{array} \right.$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2$$

1) **Forme standard**

$$\text{Min } z = -(x_1 + 2x_2)$$

$$\text{sous} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrl} -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = 4 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = 5 \end{array} \right.$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 5$$

2) **Tableau du simplexe** (forme canonique !)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
-1	-2	0	0	0	-1	0
-3	2	1	0	0	0	2
-1	2	0	1	0	0	4
1	1	0	0	1	0	5

3) Si SBR, alors **phase II** (sinon phase I)
Ici, évident

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \geq 0 \\ x_4 = 4 \geq 0 \\ x_5 = 5 \geq 0 \end{cases}$$

4) sol pas optimale car $\exists\ \overline{c}_j \leq 0$
5) **Changement de base** :
$\overline{c}_2$ + négatif que $\overline{c}_1 \rightarrow x_2$ rentre dans la base.

? Variable x_s sortant de la base
$t = \arg\min_i \{\frac{b_i}{a_{i2}}\}|_{a_{i2} \geq 0} = min\{\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}\} = \frac{2}{2}$
$\Rightarrow t = 1$

x_s tq $B^{-1} a_s = e_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow s = 3$

6) **Tableau canonique** de la nouvelle base

$$\begin{array}{rcl} l_2' & = & l_2/2 \\ l_1' & = & l_1 + l_2 \\ l_3' & = & l_3 - l_2 \\ l_4' & = & l_4 - l_2/2 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
-4	0	1	0	0	-1	2
-$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1
2	0	-1	1	0	0	2
$\frac{5}{2}$	0	-$\frac{1}{2}$	0	1	0	4

7) seul $\overline{c}_1 < 0 \rightarrow x_1$ entre en base

min$\{\frac{2}{2}, \frac{4}{5/2}\} = \frac{2}{2} \rightarrow x_4$ sort de la base

$$\begin{array}{rcl} l_3'' & = & l_3'/2 \\ l_1'' & = & l_1' + 2l_3' \\ l_2'' & = & l_2' + 3l_3'/4 \\ l_4'' & = & l_4' - 5l_3'/4 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
0	0	-1	2	0	-1	6
0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{5}{2}$
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{3}{2}$

8) seul $\overline{c}_3 < 0 \rightarrow x_3$ entre en base

min$\{\frac{3/2}{3/4}\} \rightarrow x_5$ sort de la base

$$\begin{array}{rcl} l_4''' & = & 4l_4''/3 \\ l_1''' & = & l_1'' + 4l_4''/3 \\ l_2''' & = & l_2'' + l_4''/3 \\ l_3''' & = & l_3'' + 2l_4''/3 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1	8
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3
1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
0	0	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	2

- sol : $x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 2; x_4 = x_5 = 0$
- coût = -8
- sol optimale car tous les $\overline{c}_j \geq 0$

Exercice 1.2.2.

x_1	x_2	x_3	x_4	z	b
0	6	0	0	-1	31
0	5	1	0	0	7
1	4	0	0	0	5
0	7	0	1	0	12

Optimum, $x_1 = 5; x_2 = 0; x_3 = 7; x_4 = 12$, coût=-31

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
0	-1	0	4	0	-1	0
1	-2	0	6	0	0	8
0	0	0	6	1	0	1
0	-1	1	2	0	0	1

Optimum non borné ($\to -\infty$)

x_1	x_2	x_3	z	b
-4	0	0	-1	-2
1	1	0	0	-1
2	0	1	0	2

Impossible !

Exercice 1.2.5.

$$\text{Max } x_1$$

$$\text{sous} \begin{cases} x_1 - x_2 & \leq 1 \\ 2x_1 - x_2 & \leq 2 \\ x_1 + x_2 & \leq 7 \\ x_1 \geq 0 & \\ x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Résoudre par le simplexe. Comparer avec les solutions obtenues graphiquement.

1) **Forme standard**

$$\text{Min } z = -x_1$$

$$\text{sous} \begin{cases} x_1 - x_2 & +x_3 & & & = 1 \\ 2x_1 - x_2 & & +x_4 & & = 2 \\ x_1 + x_2 & & & +x_5 & = 7 \\ x_i \geq 0 & i = 1, \ldots, 5 & & & \end{cases}$$

2) **Tableau du simplexe**

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
-1	0	0	0	0	-1	0
1	-1	1	0	0	0	1
2	-1	0	1	0	0	2
1	1	0	0	1	0	7

SBR (VHB : $x_1 = x_2 = 0$; VB : $x_3 = 1; x_4 = 2; x_5 = 7$)

3) **Phase II**

x_1 entre dans la base
$\min\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{7}{1}\} = 1 \rightarrow x_3$ ou x_4 sort de la base.
Choix : x_3 sort

$$\begin{array}{lcl} l_1 & \rightarrow & l_1 + l_2 \\ l_3 & \rightarrow & l_3 - 2l_2 \\ l_4 & \rightarrow & l_4 - l_2 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
0	-1	1	0	0	-1	1
1	-1	1	0	0	0	1
0	1	-2	1	0	0	0
0	2	-1	0	1	0	6

x_2 entre dans la base
$\min\{\frac{0}{1}, \frac{6}{2}\} = 0 \rightarrow x_4$ sort de la base.

$$\begin{array}{lcl} l_1 & \rightarrow & l_1 + l_3 \\ l_2 & \rightarrow & l_2 + l_3 \\ l_4 & \rightarrow & l_4 - 2l_3 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
0	0	-1	1	0	-1	1
1	0	-1	1	0	0	1
0	1	-2	1	0	0	0
0	0	3	-2	1	0	6

x_3 entre dans la base, x_5 en sort.

$$\begin{array}{lcl} l_1 & \rightarrow & l_1 + l_4/3 \\ l_2 & \rightarrow & l_2 + l_4/3 \\ l_3 & \rightarrow & l_3 + 2l_4/3 \\ l_4 & \rightarrow & l_4/3 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
0	0	0	1/3	1/3	-1	3
1	0	0	1/3	1/3	0	3
0	1	0	-1/3	2/3	0	4
0	0	1	-2/3	1/3	0	2

Optimum :

$x_1 = 3$; $x_2 = 4$; $x_3 = 2$; $x_4 = x_5 = 0$; $z = -3$

Remarque : si on avait fait sortir x_4 au début

$$\begin{array}{lcl} l_1 & \rightarrow & l_1 + l_3/2 \\ l_2 & \rightarrow & l_2 - l_3/2 \\ l_3 & \rightarrow & l_3/2 \\ l_4 & \rightarrow & l_4 - l_3/2 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
0	-1/2	0	1/2	0	-1	1
0	-1/2	1	-1/2	0	0	0
1	-1/2	0	1/2	0	0	1
0	3/2	0	-1/2	1	0	6

$$\begin{array}{lcl} l_1 & \rightarrow & l_1 + l_4/3 \\ l_2 & \rightarrow & l_2 + l_4/3 \\ l_3 & \rightarrow & l_3 + l_4/3 \\ l_4 & \rightarrow & 2/3 l_4 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
0	0	0	1/3	1/3	-1	3
0	0	1	-2/3	1/3	0	2
1	0	0	1/3	1/3	0	3
0	1	0	-1/3	2/3	0	4

Solution optimale identique mais avec une étape de moins.

Exercice 1.2.3.
Résoudre par la méthode du simplexe

$$\text{Min } x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{sous} \begin{cases} x_1 + 3x_2 & \geq 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 & \leq 10 \\ x_i \geq 0 & i = 1, \ldots, 3 \end{cases}$$

1) **Forme standard**

$$\text{Min } x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{sous} \begin{cases} x_1 + 3x_2 & -x_4 & & = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 & & +x_5 & = 10 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

2) Pas de base réalisable initiale $\rightarrow$ **Phase I**
Variable artificielle : a_6

$$\text{Min } a_6 \quad (\sum y_i)$$

$$\text{sous} \begin{cases} x_1 + 3x_2 & -x_4 & & +a_6 & = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 & & +x_5 & & = 10 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 5; \quad a_6 \geq 0$$

$\Rightarrow$ SBR : x^T =(0 0 0 0 10 4)

Fonction objectif sous forme canonique :

$z = a_6 = 4 - x_1 - 3x_2 + x_4$

$\rightarrow -x_1 - 3x_2 + x_4 - z = -4$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_6	z	b
-1	-3	0	1	0	0	-1	-4
1	3	0	-1	0	1	0	4
1	1	-1	0	1	0	0	10

x_2 rentre ; min$\{\frac{4}{3}, \frac{10}{1}\} \Rightarrow a_6$ sort

$$\begin{array}{lcl} l_1 & \rightarrow & l_1 + l_2 \\ l_2 & \rightarrow & l_2/3 \\ l_3 & \rightarrow & l_3 - l_2/3 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_6	z	b
0	0	0	0	0	1	-1	0
1/3	1	0	-1/3	0	1/3	0	4/3
2/3	0	-1	1/3	1	-1/3	0	26/3

$a_6 = 0 \rightarrow$ n'est plus nécessaire

on a la SBRO du problème min a_6, $a_6 \geq 0$

$\Rightarrow$ on a une SBR du problème de départ : x^T =(0 4/3 0 0 26/3)
Base : x_2, x_5

3) **Phase II**

Exprimer la fct objectif en fct des VHB

$$z = x_1 + x_3 + \frac{x_1 - x_4 - 4}{3} = \frac{4x_1}{3} + x_3 - \frac{x_4}{3} - \frac{4}{3}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
4/3	0	1	-1/3	0	-1	4/3
1/3	1	0	-1/3	0	0	4/3
2/3	0	-1	1/3	1	0	26/3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
2	0	0	0	1	-1	10
1	1	-1	0	1	0	10
2	0	-3	1	3	0	26

Optimum : x^T =(0 10 0 26 0) ; z=-10

Exercice 1.2.4.
Résoudre par la méthode du simplexe

$$\text{Min } x_2 - 2x_1$$

$$\text{sous} \begin{cases} 2 \leq x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq x_1 \leq x_2 + 2 \end{cases}$$

Comparer avec les solutions obtenues graphiquement

1) **Forme standard**

$$\text{Min } x_2 - 2x_1$$

$$\text{sous} \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_6 = 2 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 6 \end{cases}$$

Il manque une VB

2) **Phase I**

$$\text{Min } x_7$$

$$\text{sous} \begin{cases} x_1 - x_3 + x_7 = 2 \\ x_1 + x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_6 = 2 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 7 \end{cases}$$

$$z = x_7 = 2 - x_1 + x_3 \rightarrow x_3 - x_1 - z = -2$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	b
-1	0	1	0	0	0	0	-1	-2
1	0	-1	0	0	0	1	0	2
1	0	0	1	0	0	0	0	8
-1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	-1	0	0	0	1	0	0	2

x_1 rentre ; $\min\{\frac{2}{1}, \frac{8}{1}, \frac{2}{1}\} \rightarrow x_6$ ou x_7 sort (x_7 pour terminer phase I)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	b
0	0	0	0	0	0	1	-1	0
1	0	-1	0	0	0	1	0	2
0	0	1	1	0	0	-1	0	6
0	1	-1	0	1	0	1	0	2
0	-1	1	0	0	1	-1	0	0

$z = 0 = x_7$ OK ; SBR : x^T =(2 0 0 6 2 0)
VB : x_1, x_4, x_5, x_6 ; VHB : x_2, x_3

3) **Phase II**
$z = x_2 - 2x_1 = x_2 - 2(x_3 + 2) \Rightarrow x_2 - 2x_3 - z = 4$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
0	1	-2	0	0	0	-1	4
1	0	-1	0	0	0	0	2
0	0	1	1	0	0	0	6
0	1	-1	0	1	0	0	2
0	-1	1	0	0	1	0	0

x_6 sort, x_3 rentre

$$\begin{array}{lcl} l_1 & \rightarrow & l_1 + 2l_5 \\ l_2 & \rightarrow & l_2 + l_5 \\ l_3 & \rightarrow & l_3 - l_5 \\ l_4 & \rightarrow & l_4 + l_5 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
0	-1	0	0	0	2	-1	4
1	-1	0	0	0	1	0	2
0	1	0	1	0	-1	0	6
0	0	0	0	1	1	0	2
0	-1	1	0	0	1	0	0

x_4 sort, x_2 rentre

$$\begin{aligned} l_1 &\rightarrow l_1 + l_3 \\ l_2 &\rightarrow l_2 + l_3 \\ l_5 &\rightarrow l_5 + l_3 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
0	0	0	1	0	1	-1	10
1	0	0	1	0	0	0	8
0	1	0	1	0	-1	0	6
0	0	0	0	1	1	0	2
0	0	1	1	0	0	0	6

Optimum : x^T =(8 6 6 0 2 0) ; z=-10

4) **Remarque :**

Substitution : $x'_1 = x_1 - 2$

$$\Rightarrow \text{Min } x_2 - 2(x'_1 + 2) \rightarrow \text{Min } x_2 - 2x'_1$$

$$\text{sous} \begin{cases} 0 \leq x'_1 \leq 6 \\ x_2 - 2 \leq x'_1 \leq x_2 \\ x'_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1 + x_3 = 6 \\ x'_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ -x'_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ simplexe canonique !

5) **Résolution graphique**